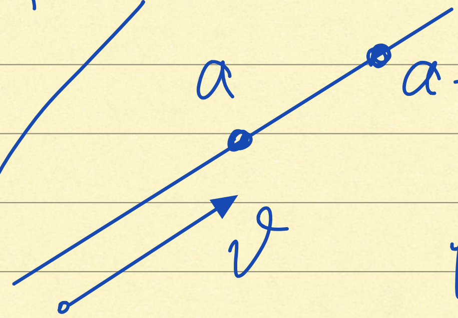
$\boxed{\text{Extremos de funções escalares}}$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^2



$a + tv = g(t)$, $t \in \mathbb{R}$

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$: $h(t) = f(a+tv) = f(g(t))$

$h(0) = f(a)$

<u>Taylor em $\mathbb{R}$:</u>

$$h(t) - h(0) = h'(0)t + h''(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$a \in \mathbb{R}^n$, ponto crítico de f:

$$h'(0) = 0 \Longrightarrow \boxed{\nabla f(a) = 0}$$

$$h(t) - h(0) = \frac{1}{2} \underbrace{h''(0)}_{\text{sinal}} t^2 + o(t^2)$$

$$h''(0) = v^T Hf(a)\, v$$

$Hf(a)$ = matriz Hesseana de f em a

$$= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) \right]_{n\times n}$$ Simétrica

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ v. p. reais

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ vect. p.

base ortonormada de $\mathbb{R}^n$.

$h''(0)$ sinal ??

Sinal de $h''(0)$?

Basta saber o sinal dos valores próprios de $Hf(a)$.

Se $v \neq 0$ for vector próprio de $Hf(a)$:

$$\underbrace{h''(0)}_{\text{sinal}} = v^T Hf(a) v = v^T(\lambda v)$$

$$= \underbrace{\lambda}_{\text{sinal}} \|v\|^2$$

ALGORITMO:

1) Pontos Críticos de f:

$$\nabla f(a) = 0$$

2 - Matriz Hesseana:

$Hf(a) \longrightarrow$ Valores próprios reais

Casos:

1) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$

$\Rightarrow$ a é ponto de mínimo de f.

2) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n < 0$

$\Rightarrow$ a é ponto de máximo de f.

3) $\exists_{j \neq k} : \lambda_j < 0 ; \lambda_k > 0$

$\Rightarrow$ a não é ponto de extremo de f

(a é ponto de sela de f)

4) $\exists_j : \lambda_j = 0$ e λ_k $(k \neq j)$ (todos do mesmo sinal)

(problema complicado!)

$\Rightarrow$ Análise da função "perto" do ponto crítico a.

—————— // ——————

Nota: Em $\mathbb{R}^2$: $A_{2\times 2}$ simétrica

$$\begin{cases} \det A = \lambda_1 \lambda_2 \\ Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \text{sinal de } \lambda_1 \text{ e } \lambda_2.$$

Em geral: $\det(A - \lambda I) = 0$
($\mathbb{R}^n$) (resolver)

Exemplos:

1) $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\nabla f(x,y) = 0$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$ ponto crítico de f.

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

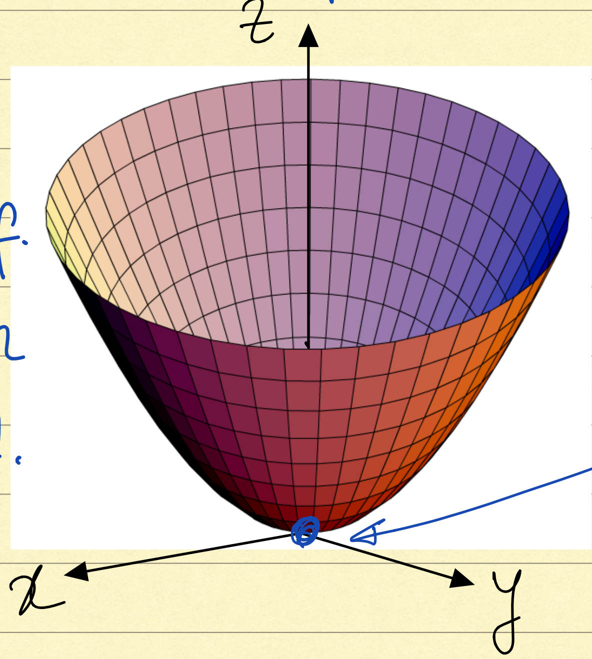
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 > 0$$

$(0,0)$ ponto de mínimo de f.

Gráfico de f: $\quad z = x^2 + y^2$

(0,0) ponto de mínimo de f.

$f(0,0) = 0$ valor mínimo de f.



$(0,0,f(0,0)) =$

$= (0,0,0)$

2) $f(x,y) = -x^2 - y^2$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longrightarrow (0,0)$$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ (0,0) ponto de máximo de f

3) $f(x,y) = x^2 - y^2$

$\nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

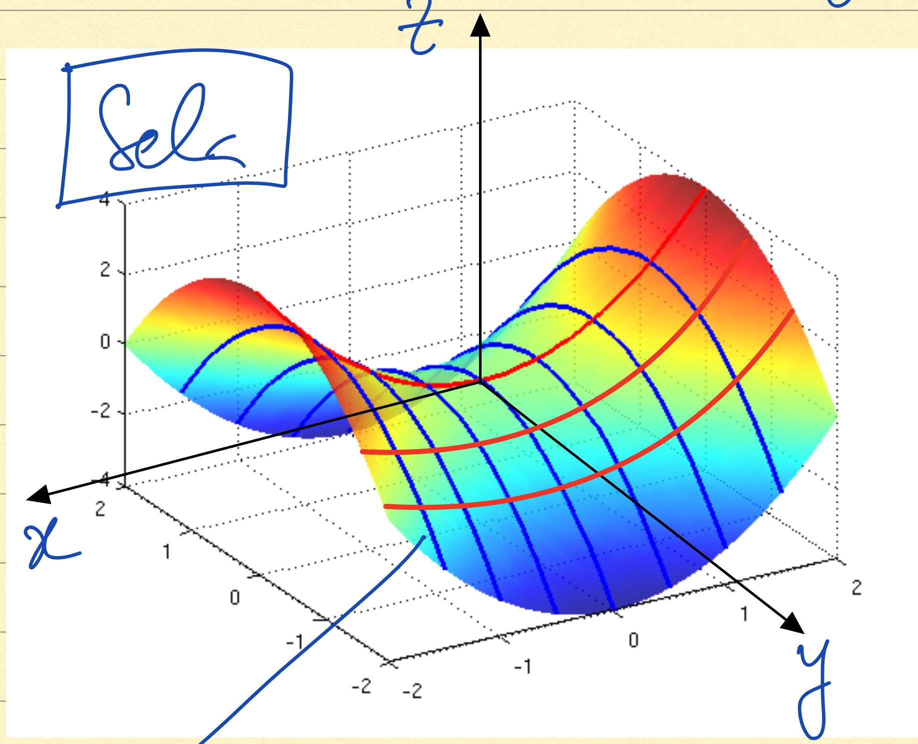
$(0,0)$ p.^{to} crítico de f.

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = Hf(0,0)$$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$

$(0,0)$ não é ponto de extremo de f. (ponto de sela de f).

Gráfico de f: $z = x^2 - y^2$



Para cada x fixo: parábola voltada para baixo $\underbrace{z} = x^2 - \underbrace{y^2}$.

Para cada y fixo: parábola voltada para cima $\underbrace{z} = -y^2 + \underbrace{x^2}$.

(ponto de <u>sela</u> de f)

4) $f(x,y) = xy - x^3$

$\nabla f(x,y) = (0,0)$

$\rightarrow \begin{cases} y - 3x^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

$(0,0)$ é o único ponto crítico de f.

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -6x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\det Hf(0,0)}_{=\lambda_1\lambda_2} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 < 0$$

$\Longrightarrow$ sinais opostos

$\Longrightarrow$ ponto de sela.

5) $f(x,y) = x^2y^2 - x^3$

$\nabla f(x,y) = (0,0)$

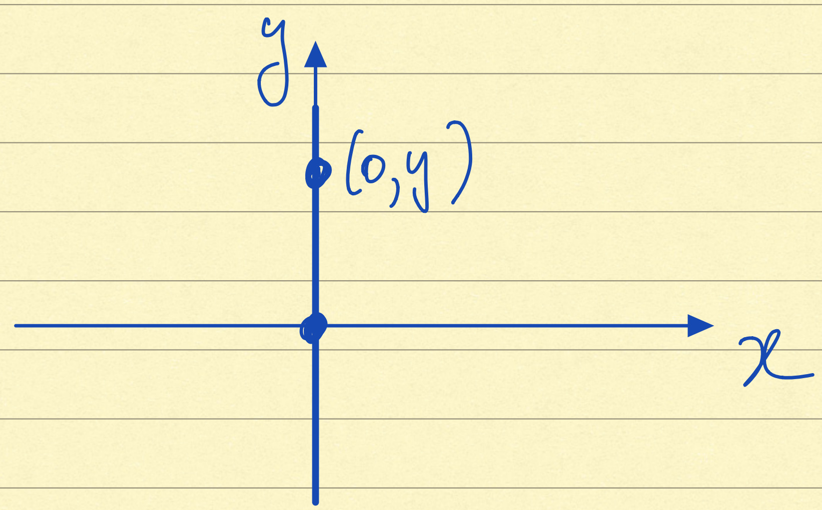
$$\begin{cases} 2xy^2 - 3x^2 = 0 \\ \boxed{2x^2y = 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x(2y^2 - 3x) = 0 \\ x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$$

[Nota: $ab = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \vee b = 0$]

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

puntos críticos de f:

$$(0, y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

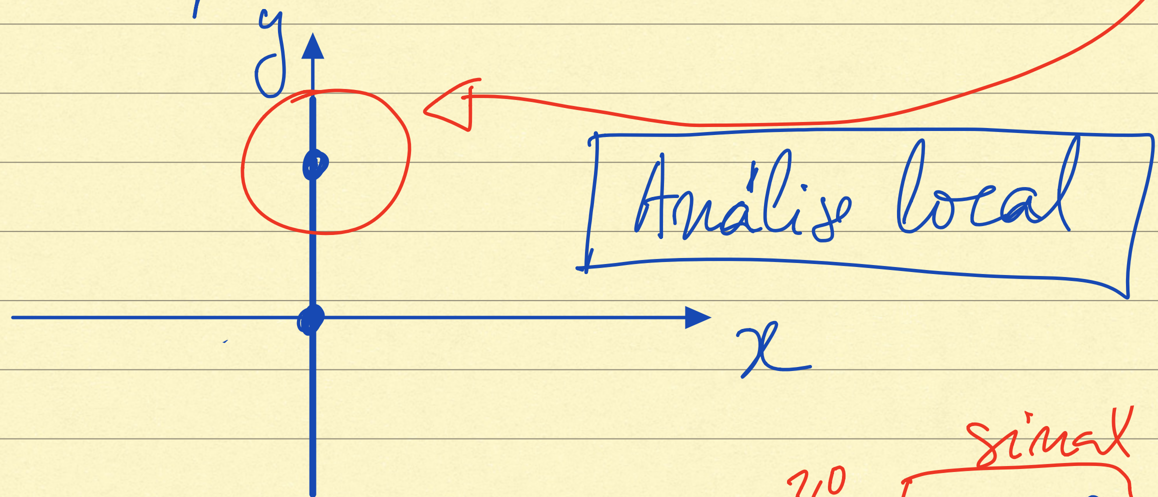


$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2y^2 - 6x & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{bmatrix}$$

$$Hf(0,y) = \begin{bmatrix} 2y^2 & 0 \\ 0 & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2y^2, \quad \boxed{\lambda_2 = 0}$$ complicado!

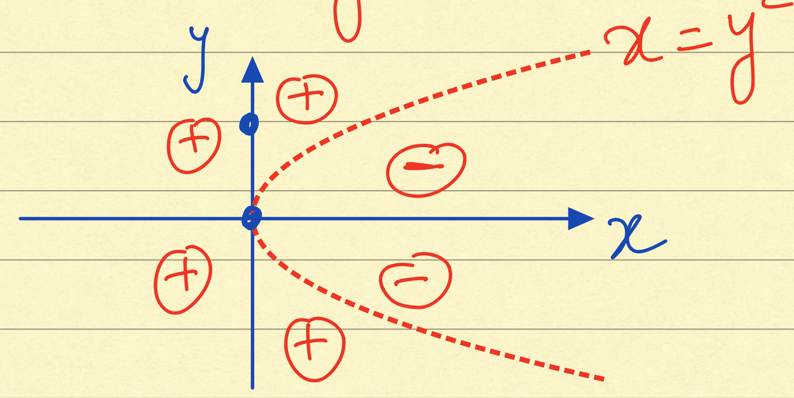
Fazer análise de f "perto" do ponto crítico $(0,y)$.

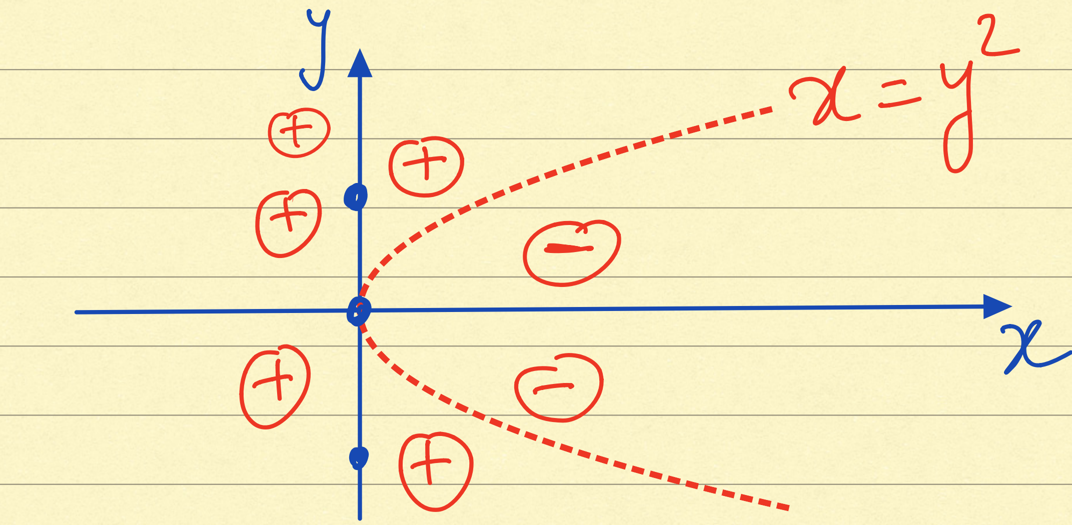


$$f(x,y) = x^2y^2 - x^3 = \underbrace{\overset{\geq 0}{x^2}\overbrace{(y^2 - x)}^{\text{sinal}}}_{\text{Sinal}}$$

$$f(0,y) = 0$$

Sinal de $y^2 - x$:





$(0,0) \rightarrow p^{to}$ de sela de f

$(0,y),\ y \neq 0 \rightarrow p^{to}$ de mínimo de f.